Die Grundstruktur der klassischen Partikelmechanik und ihre Spezialisierungen

W. Balzer *

Seminar für Philosophie, Logik und Wissenschaftstheorie, Universität München

und C. U. Moulines

Instituto de Investigaciones Filosóficas, Universidad Nacional Autónoma de México

Z. Naturforsch. **36a**, 600–608 (1981); eingegangen am 1. April 1981

The Basic Structure of Classical Particle Mechanics and it's Specializations

Classical particle mechanics is given an axiomatic form which — we think — constitutes an essential progress with respect to extisting axiomatizations. We clarify the status of it's basic concepts (first of all of the concept of force), we reconstruct the factual (implicit) form of it's basic law, and we exemplify the general method of obtaining more special mechanical laws from this basic law by means of concrete examples. By this the "overall"-structure of classical particle mechanics as that of an "open" theory can be clearly recognized. The result is of methodological, philosophical and didactical relevance.

Seit Entstehung der klassischen Partikelmechanik (KPM) wurde immer wieder versucht, diese Theorie als paradigmatisches Beispiel einer erfolgreichen physikalischen Theorie zu axiomatisieren und dadurch ihre Grundlagen klar und explizit herauszuarbeiten. Schon Newton selbst wollte seiner Theorie eine axiomatisierte Form geben — allerdings ist seine Darstellung weit hinter den Standards von Exaktheit und Vollständigkeit zurückgeblieben, die schon in der damaligen Axiomatik (etwa in der euklidischen Geometrie) vorhanden waren. Im 20. Jahrhundert hat es mehrere Axiomatisierungen der KPM gegeben. Historisch bedeutend ist die von Hamel [1], die die späteren Arbeiten in dieser Richtung anregte. Sie läßt allerdings in logisch-methodologischer Hinsicht viel zu wünschen übrig, weil weder die Natur der Grundbegriffe noch die logische Gesamtstruktur der Theorie klar ersichtlich wird.

Die weiteren Rekonstruktionen der KPM, welche die formal-axiomatische Methode konsequent verfolgen, kann man in erster Näherung in zwei Gruppen einteilen. Die erste Gruppe besteht aus Axiomatisierungen, die sich bei der Auswahl der Grundbegriffe so nahe wie möglich an den rein kinematischen Begriffen halten. Hierzu gehören etwa die Arbeiten von Hermes [2] und Simon [3]. In diesen Versuchen wird der Begriff der Kraft als definierter Begriff (im streng logischen Sinn von „definiert") eingeführt, d.h. der Begriff der Kraft ist in der Mechanik eliminierbar und nicht-kreativ, also — logisch gesehen — überflüssig.

An dieser Stelle scheint es angebracht, einige allgemeine Bemerkungen über den Begriff der *Definition* zu machen, da in den geläufigen Diskussionen der Grundlagen der Physik nicht immer Klarheit über ihn besteht. Nach der modernen Definitionstheorie ist der Begriff innerhalb einer vorgegebenen axiomatisierten Theorie genau dann (explizit) *definierbar*, wenn der Term, der ihn ausdrückt, *eliminierbar* und *nicht-kreativ* ist. Das bedeutet intuitiv erstens, daß zu jeder Aussage der Theorie, in der dieser Term vorkommt, eine andere logisch äquivalente Aussage der Theorie existiert, in der der Term nicht vorkommt (Eliminierbarkeit) und zweitens, daß aus den Axiomen der Theorie zusammen mit der Definition des Terms keine weitere Aussage, in der der Term nicht vorkommt, ableitbar ist, die nicht schon ohne die Definition ableitbar wäre. Wenn wir im Folgenden von „Definition" und „definierbar" reden, werden wir es genau in dem eben präzisierten Sinn tun **. Um Mißverständnissen vorzubeugen, werden wir die Bedeutungen der Ausdrücke „Definition" und „Bestimmung" einer

* Die Arbeit dieses Autors erfolgte im Rahmen des DFG-Projekts BA 678/1.

Reprint requests to Dr. W. Balzer, Institut für Statistik und Wissenschaftstheorie, Seminar für Philosophie, Logik und Wissenschaftstheorie, Ludwigstraße 31, D-8000 München.

** Für eine ausführliche und formale Darstellung der Definitionstheorie vergleiche etwa Hinst [4].

0340-4811 / 81 / 0600-0600 $ 01.00/0. — Please order a reprint rather than making your own copy.

Größe scharf trennen. Das, was in physikalischen Schriften oft als „Definition“ bezeichnet wird, ist eigentlich nur als „Bestimmung“ eines Begriffs zu verstehen, d.h. als Festlegung der Werte einer (oft nicht definierten) Größe durch andere (logisch unabhängige Größen) mittels einer gesetzesartigen Aussage, in der alle diese Größen vorkommen.

In unserem konkreten Fall können wir genau sagen, was die Ansätze zur Definition der dynamischen durch die kinematischen Größen im allgemeinen bedeuten. Zuerst wird versucht, Massenverhältnisse durch Geschwindigkeitsverhältnisse (Hermes [2]) oder durch Beschleunigungsverhältnisse (Mach [5a, b], Simon [3]) zu definieren. Danach wird die Kraft einfach als „Abkürzung“ für den Ausdruck „Masse mal Beschleunigung“ definiert. Dadurch wird das zweite Newtonsche Grundgesetz als bloß definitorische Tautologie gedeutet.

Diese „kinematisierenden“ Versuche, die Kraft (und sogar die Masse) formal wegzudefinieren, sind inhaltlich sehr unbefriedigend. Sie führen zu einer zu eingeschränkten Fassung der Mechanik. Abgesehen davon, daß die Definition der Massenverhältnisse durch Beschleunigungs- bzw. Geschwindigkeitsverhältnisse nur in besonderen Anwendungsfällen der Theorie funktioniert, beruht diese Definition der Kraft auf einer falschen Vorstellung der Rolle des Kraftbegriffs in der Theorie. Bei diesen Ansätzen kann man nämlich nicht mehr die Unterscheidung zwischen den einzelnen Kraftkomponenten, die in einem mechanischen System wirken und der daraus resultierenden Gesamtkraft rechtfertigen. Diese Unterscheidung ist aber für viele Anwendungen der KPM wesentlich. Darüber hinaus ist die Einführung von speziellen dynamischen Gesetzen mit dem Begriff der Kraftkomponente wesentlich verbunden — wie wir unten zeigen werden.

Die zweite Richtung in den Axiomatisierungen nimmt keinen Anstoß an der Einführung von Masse und Kraft als Grundbegriffen. Eine wichtige Arbeit in dieser Richtung stammt von McKinsey, Sugar and Suppes [6]. Sie wurde von Sneed [7] weitergeführt. Auch die von Ludwig [9] vorgeschlagene Rekonstruktion der KPM wäre wohl in dieser Richtung einzuordnen — trotz seiner etwas undeutlichen und schwankenden Deutung des Kraftbegriffs *. In McKinsey et al. [6] wird der Begriff einer Kraftkomponente, zusammen mit Masse, Ort, Zeit und Partikeln, als Grundbegriff eingeführt. Das zweite Newtonsche Axiom ist dann keine Definition mehr (das läßt sich beweisen), sondern ein echtes, physikalisches Gesetz.

Unsere Arbeit schließt an die Arbeiten dieser zweiten Richtung an mit dem Ziel, den Kraftbegriff in inhaltlich befriedigender Weise zu behandeln. Es wird immer wieder bemerkt, daß der Kraftbegriff von anderer Natur sei als die übrigen mechanischen Größen und daß das zweite Newtonsche Axiom mehr beinhalte als nur, daß die Summe der Kräfte gleich der Masse mal Beschleunigung ist. Als Beispiel für diese Unzufriedenheit diene hier die negative Feststellung, die C. Truesdell zum Versuch von McKinsey-Sugar-Suppes gemacht hat: „The communicator is in complete disagreement with the view of classical mechanics expressed in this article ... he does not believe the present work achieves any progress whatever towards the precision of the concept of force, which always has been and remains still the central conceptual problem, and indeed the only one not essentially trivial, in the foundations of classical mechanics“ (McKinsey et al. [6], a. a. O., S. 253). Hier kommt ein Unbehagen zum Ausdruck, das vor allem die Festlegung des Kraftbegriffs, sowie die Rekonstruktion des zweiten Newtonschen Axioms und seines Verhältnisses zu anderen dynamischen Gesetzen betrifft.

Wir wollen in dieser Arbeit zeigen, was die implizite Natur des Kraftbegriffs ist, wie er zur Aufstellung des Grundgesetzes der KPM verwandt wird und wie die Spezialgesetze der Theorie durch Spezialisierung aus dem Grundgesetz gewonnen werden können. Wir werden ziemlich genau und ausführlich die Form aller wichtigen dynamischen Spezialgesetze angeben, damit die obigen Punkte und somit auch die Gesamtstruktur der KPM klar hervortreten.

Obwohl unsere Darstellung in einem Standard-System der axiomatischen Mengenlehre leicht zu formalisieren wäre, haben wir aus Gründen der besseren Lesbarkeit davon abgesehen. Wir benutzen einige Abkürzungen und spezielle Symbole, an die hier kurz erinnert sei. Für eine Menge A bedeutet

* In Ludwig [9] S. 124 und in Ludwig [8], S. 78 wird zwar gesagt, daß die Kraftvektoren durch „Masse mal Beschleunigung“ „definiert“ werden. Aus dem Zusammenhang wird jedoch klar ersichtlich, daß Ludwig das zweite Newtonsche Grundgesetz als echtes Axiom und nicht etwa als Tautologie betrachtet. Außerdem ist ihm klar, daß das Wort „definieren“ hier nicht ganz ernst gemeint werden soll. (Im ersten genannten Werk schreibt es dieses Wort sogar in Anführungszeichen.) Unter „definieren“ meint Ludwig wohl nur, was wir mit „bestimmen“ ausdrücken.

$\|A\|$ ihre Kardinalität. n-Tupel schreiben wir mit eckigen Klammern $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$. $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ sind die Mengen der natürlichen und reellen Zahlen, $\mathbb{N}_n$ die der natürlichen Zahlen $1, \ldots, n$. $|x|$ ist der übliche Betrag für reelle Zahlen oder Vektoren. $\otimes$ bezeichnet das Vektorprodukt. „f ist φ^∞“ heißt, daß die Funktion f in allen Argumenten, für die dies Sinn macht, unendlich oft partiell differenzierbar ist.

I. Das Grundgesetz der KPM

Zur Axiomatisierung werden wir die auf Bourbaki zurückgehende Methode der Einführung eines mengentheoretischen Prädikats benutzen*.

Als Hilfsbegriffe benutzen wir die „Hilfsbasismengen“ $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, S und T. S (bzw. T) ist ein drei- (bzw. ein-) dimensionaler euklidischer Vektorraum, der darüber hinaus ein Banachraum sein soll**. S stellt den Raum dar, T die Zeit. In vielen Darstellungen der KPM wird S einfach mit $\mathbb{R}^3$ und T mit $\mathbb{R}$ identifiziert. Dies ist inhaltlich unbefriedigend, da S und T eine physikalische Interpretation (nämlich als Raumgebiet und zeitliche Ordnung) haben, während $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}$ rein mathematische Interpretationen haben.

Wir definieren nun das Grundprädikat der KPM, in dem die grundlegenden Axiome zusammengefasst sind.

D1. x ist ein *klassisch-mechanisches System* (KMS) genau dann wenn es P, σ, μ, k, m, n, $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, $\psi_1, \ldots, \psi_m$ und F gibt, so daß

1) $x = \langle S, T, \mathbb{N}, \mathbb{R}; P, \sigma, \mu, k, m, n, \varphi_1, \ldots, \varphi_k, \psi_1, \ldots, \psi_m, F \rangle$
2) P ist eine endliche, nicht-leere Menge
3) $\sigma\colon P \times T \to S$ ist φ^∞
4) $\mu\colon P \to \mathbb{R}$ und für alle $p \in P$ gilt: $\mu(p) > 0$
5) $k, m, n \in \mathbb{N}, n > 0$
6) a) für alle i mit $1 \leqq i \leqq k$ gilt: $\varphi_i\colon P \times T \to S$
   b) für alle j mit $1 \leqq j \leqq m$ gilt: $\psi_j\colon P \times T \to \mathbb{R}$
7) $F\colon \mathbb{N}_n \times P \times S^k \times \mathbb{R}^m \times T \to S$
8) für alle $p \in P$ und alle $t \in T$ gilt:

$$\mu(p)\,\ddot{\sigma}(p,t) = \sum_{i=1}^{n} F(i, p, \varphi_1(p,t), \ldots, \varphi_k(p,t), \cdot\, \psi_1(p,t), \ldots, \psi_m(p,t), t).$$

* Eine leicht faßliche Darstellung findet man z.B. in Suppes [10].

** Die Banachraum-Struktur braucht man, um höhere Ableitungen bilden zu können.

Wir werden im folgenden die Ausdrücke auf der rechten Seite von 8) wie folgt abkürzen:

$$F(i,p,t) := F(i, p, \varphi_1(p,t), \ldots, \varphi_k(p,t), \psi_1(p,t), \ldots, \psi_m(p,t), t).$$

Die Summe $\sum_{i \leqq n} F(i, p, t)$ heißt die *resultierende Kraft* oder auch *Gesamtkraft* des Systems.

Erläuterungen zu **D1**): In den intendierten Anwendungen der KPM werden die eigentlichen Grundbegriffe der Theorie folgendermaßen gedeutet. P stellt eine Menge von *Partikeln* oder *Massenpunkten* dar, σ ist die *Ortsfunktion*. Sie gibt zu jedem Massenpunkt und jedem Zeitpunkt den Ort im Raum in Form eines Vektors in S an (dabei wird implizit ein Koordinatensystem, d.h. eine Basis, für S vorausgesetzt). Für $p \in P$ liefert σ im zweiten Argument gerade die Bahn von p. μ ist die Massenfunktion; sie ist ein zeitunabhängiger, positiver Skalar. φ_l und ψ_j werden „mechanische Parameter“ genannt. Es sind dies die Parameter (= metrische Funktionen), die ein mechanisches System vollständig beschreiben. φ_l sind die „raumartigen“ Parameter, d.h. diejenigen, deren Werte Vektoren in S sind — nämlich Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung. Für jedes mechanisches System gibt die Zahl k an, wieviele raumartige Parameter zu seiner Beschreibung gebraucht werden. ψ_j sind skalare Funktionen — etwa Masse oder elektrische Ladung. In „degenerierten“ Fällen können die ψ_j auch sogenannte „Konstante“ sein: entweder Parameter, die von der Art des Materials oder des Mediums abhängen, oder auch universelle Konstanten wie die Gravitationskonstante. Die Zahl m gibt die Anzahl der benötigten skalaren Parameter an.

F ist die allgemeine *Kraftfunktion*. Sie ist eine vektorielle Funktion mit Werten in S. Für jedes fest vorgegebene i stellt F_i, definiert durch $F_i(p,t) := F(i, p, t)$, *eine* sogenannte *Kraftkomponente* dar. Die verschiedenen F_i sind bei uns Grundbegriffe, obwohl wir sie aus ästhetischen Gründen zu *einer* Funktion F zusammengefaßt haben. Die Bewegung des Systems ist durch die Zusammensetzung von n verschiedenen Kraftkomponenten bestimmt. Bei vorgegebenem i hängt F_i nicht nur vom jeweiligen Teilchen p, auf das F_i „wirkt“ und vom betrachteten Zeitpunkt ab, sondern auch von raumartigen Parametern φ_l und Skalaren ψ_j, deren Zahl $\leqq k$ bzw. $\leqq m$ sein soll. Selbstverständlich werden bei der Bestimmung der verschiedenen F_i nicht *alle* φ_l

und ψ_j eine Rolle spielen. Diejenigen, die nicht gebraucht werden, sind trotzdem formal als Argumente zugelassen. Alle F_i hängen dann formal von den gleichen Parametern ab.

Gleichung D1—8) ist die explizite Formulierung des Grundgesetzes des Theorie, des zweiten Newtonschen Axioms. Der Form nach sollte klar sein, daß wir hier keine konkrete Aussage über die Wirklichkeit haben, sondern vielmehr ein *Rahmengesetz*.

Dies sieht man vor allem daran, daß die Anzahl und die konkrete Natur der φ_l und ψ_j-Parameter, sowie die konkrete Form des funktionellen Zusammenhangs F, der sie miteinander verbindet, nicht spezifiziert werden. Unsere Hauptthese ist nun die folgende:

Die Gesamtstruktur der KPM wird durch Konkretisierung des Rahmengesetzes (D1—8) gewonnen.

Anders gesagt: Alle spezielleren Gesetze der KPM, die in verschiedenen Arten dynamischer Systeme Anwendung finden, werden durch sukzessive Spezifizierung des Grundgesetzes gewonnen. Diese These wollen wir konkret durch Aufstellung der wichtigsten Spezialgesetze der KPM innerhalb des gegebenen Rahmens nachweisen.

Es gibt mehrere Möglichkeiten zur Spezialisierung des Rahmengesetzes; sie können bestehen in Spezifizierungen

a) der Zahl n der Kraftkomponenten,

b) der Zahl $k+m$ der mechanischen Parameter,

c) der Natur der φ_l- und ψ_j-Parameter,

d) der konkreten mathematischen Form, die jede Kraftkomponente F_i annehmen soll.

Unter c) wird z.B. gesagt, daß φ_1 der Ort, φ_2 die Geschwindigkeit, ψ_1 die Zeit, ψ_2 eine „Materialkonstante" und ψ_3 ein Reibungskoeffizient ist (etwa zur Darstellung eines gedämpften harmonischen Oszillators in einer Flüssigkeit); oder daß φ_1 der Ort, φ_2 die Geschwindigkeit, ψ_1 die Masse, ψ_2 die „Beschleunigungskonstante" und ψ_3 der Luftwiderstand ist (etwa zur Darstellung des freien Falls eines Körpers auf der Erdoberfläche); oder daß φ_1 der Ort, φ_2 die Geschwindigkeit, φ_3 die Ableitung der Beschleunigung, ψ_1 die Zeit, ψ_2 die Ladung, ψ_3 die Lichtkonstante ist (zur Beschreibung einer Ladung, die sich in einem Kraftfeld bewegt und ein elektromagnetisches Feld erzeugt — vgl. etwa Mittelstaedt [11]. Zu d) ist zu bermerken, daß die allgemeine Form der resultierenden Kraft als Summe der Kraftkomponenten in D1 immer verlangt wird. Spezifizieren kann man aber noch die verschiedenen Kraftkomponenten und zwar einmal nach ihrer „arithmetischen" Form, z.B. $F_i = -kx$, oder nach „analytischen" Eigenschaften, z.B. nach Differenzierbarkeit oder $F_i = -\nabla U$.

Diese verschiedenen Spezialisierungsmöglichkeiten können vollständig oder nur partiell, sowie einzeln oder zusammen durchgeführt werden. Ein Spezialgesetz, bei dem alle vier Arten der Spezifizierung vollständig durchgeführt sind, nennen wir ein „terminales Gesetz" der KPM.

II. Spezialisierungen

Wir wollen nun anhand von konkreten Beispielen zeigen, wie der Prozeß der sukzessiven Spezialisierung vor sich geht. Die erste Spezialisierung betrifft nur die Form von F und zwar nicht vollständig, sondern nur in sehr allgemeiner Weise. Dadurch erhalten wir das actio-reactio-Prinzip.

D2. x ist ein *teilweise abgeschlossenes KMS* genau dann, wenn D1 gilt und es $P^* \subseteqq P$ gibt, so daß für alle i mit $1 \leqq i \leqq m+k$ und alle $p \in P^*$ und $t \in T$ gilt: wenn $F(i, p, t) \neq 0$, dann gibt es genau ein $p' \in P^*$, so daß $F(i, p, t) = -F(i, p', t)$ und

$$\begin{aligned}&(\sigma(p,t) - \sigma(p',t)) \otimes F(i,p,t)\\ &= -(\sigma(p,t) - \sigma(p',t)) \otimes F(i,p',t).\end{aligned}$$

In einem teilweise abgeschlossenen System braucht nur eine Teilmenge, nämlich P^*, der Menge der Massenpunkte des Systems abgeschlossen zu sein. Wenn $p \in P^*$ einer nicht-verschwindenden Kraftkomponente $F(i, p, t)$ ausgesetzt ist, so wirkt die gleiche Kraftkomponente auch auf ein anderes Teilchen p' und zwar so, daß beide Kräfte invers zueinander sind und entlang der Verbindungsgeraden beider Teilchen wirken. Die Vorstellung dabei ist, daß $F(i, p, t)$ von p' und $F(i, p', t)$ von p „verursacht" sind. Die Wirkung von p' auf p $(F(i, p, t))$ und die Gegenwirkung von p auf p' $(F(i, p', t))$ heben sich auf*.

* Unsere Behandlung ist hier wesentlich enger als die von Sneed [7], indem bei uns die „aufhebende" Kraft stets von gleicher Art sein muß (gleicher Index der Kraftkomponenten). Wir kennen aber keine praktisch relevanten Beispiele, in denen eine Kraftkomponente F_i *nur* von anderen Komponenten F_j mit $j \neq i$ aufgehoben würde. In den relevanten Fällen ist F_i stets unter den F_j, so daß man die F_j mit $j \neq i$ unterdrücken kann.

D3. x ist ein *abgeschlossenes KMS* genau dann, wenn **D2** gilt und $P^* = P$.

Auf abgeschlossene Systeme wirken keine äußeren Kräfte, weil alle Kräfte schon im System kompensiert werden. Genauer gilt:

T1. Ist x ein abgeschlossenes KMS, so gilt für alle $t, t' \in T$:

a) $\sum_{p \in P, i \leqq n} F(i, p, t) = 0$,

b) $\sum_{p \in P} \mu(p)\dot{\sigma}(p, t) = \sum_{p \in P} \mu(p)\dot{\sigma}(p, t')$,

c) $\sum_{p \in P} \mu(p)(\sigma(p, t) \otimes \dot{\sigma}(p, t))$
$= \sum_{p \in P} \mu(p)(\sigma(p, t') \otimes \dot{\sigma}(p, t'))$.

Das heißt, es gilt Impuls- (T1-b) und Drehimpulserhaltung (T1-c). Im Beweis von a) benutzt man die Forderung in D2, daß es genau ein p' gibt. Man zeigt, daß die hierdurch gegebene Abbildung injektiv ist.

D4. x ist ein *ortsabhängiges System* genau dann, wenn

1) x ist ein KMS,
2) $k \geqq 1$*,
3) für alle $p \in P$ und $t \in T$: $\varphi_1(p, t) = \sigma(p, t)$,
4) es gibt $i \leqq n$, $t \in T$ und $p \in P$, so daß
$$\frac{\partial}{\partial \varphi_1} F(i, p, t) \neq 0 .$$

Die i-te Kraftkomponente auf mindestens ein Teilchen p hängt zu mindestens einer Zeit t vom Ort $\sigma(p, t)$ des Teilchens ab. „Ort" ist hier der einzige explizit festgelegte Parameter.

D5. x ist ein *geschwindigkeitsabhängiges System* genau dann, wenn

1) x ist ein KMS,
2) $k \geqq 1$,
3) für alle $p \in P$ und $t \in T$: $\varphi_1(p, t) = \dot{\sigma}(p, t)$,
4) es gibt $i \leqq n$, $t \in T$ und $p \in P$, so daß
$$\frac{\partial}{\partial \varphi_1} F(i, p, t) \neq 0 .$$

Einziger explizit festgelegter Parameter ist hier die Geschwindigkeit $\dot{\sigma}$ und die i-te Kraftkomponente hängt für ein Teilchen p echt davon ab.

* x hat nach 1) die in **D1—1)** festgelegte Form. Die bei den folgenden Bedingungen auftretenden Symbole bezeichnen, wenn nichts gesagt wird, stets die entsprechenden Komponenten von x.

D6. x ist ein KMS *mit Reibung* genau dann, wenn

1) x ist ein KMS,
2) $k \geqq 1$,
3) für alle $p \in P$ und $t \in T$: $\varphi_1(p, t) = \dot{\sigma}(p, t)$,
4) es gibt $i \leqq n$, $r \geqq 1$ und $\gamma \in \mathbb{R}^+$, so daß für alle p, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $\beta_1, \ldots, \beta_m$, t:
$$F(i, p, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_m, t) = -\gamma \cdot \alpha_1{}^r .$$

Hier ist die mathematische Form von F_i genau bestimmt. F_i hängt nur vom Parameter φ_1 (der Geschwindigkeit) ab und zwar in der Form $-\gamma \cdot \alpha_1{}^r$. Um hervorzuheben, daß in 4) die mathematische Form von F_i festgelegt wird, haben wir auch eine „abstrakte" Notation mit α_i, β_j als Variablen für reelle Zahlen gewählt. Inhaltlich muß man sich hier und im folgenden immer vorstellen, daß $\alpha_i = \varphi_i(p, t)$ und $\beta_j = \psi_j(p, t)$ ist, d.h. die α_i und β_j stellen spezifische Werte der φ_i- und ψ_j-Parameter dar. Kompliziertere Reibungsgesetze erhält man als Varianten von D6-4.

D7. x ist ein *zeitabhängiges System* genau dann, wenn

1) x ist ein KMS,
2) es gibt $i \leqq n$, $p \in P$ und $t \in T$, so daß
$$\frac{\partial}{\partial t} F(i, p, t) \neq 0 .$$

Die Zeit hat eine Sonderstellung und wird nicht wie andere Parameter behandelt. Sie ist vielmehr von Anfang an in F als letztes Argument vorgesehen.

D8. x ist ein *konservatives System bezüglich U* genau dann, wenn

1) x ist ein KMS,
2) $k \geqq 1$,
3) für alle $p \in P$ und $t \in T$: $\varphi_1(p, t) = \sigma(p, t)$,
4) $U: P \times S^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ist φ^∞,
5) es gibt $i \leqq n$, so daß für alle p, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $\beta_1, \ldots, \beta_m$, t:
$$F(i, p, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_m, t) = -\nabla U(p, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_m, t) .$$

F_i ist Gradient eines Potentials U. Dies ist eine Forderung, die die mathematische Form betrifft. U muß vom Ort (D8-2, 3), kann darüber hinaus aber auch von p, t und anderen Parametern abhängen. Dies ist eine sehr allgemeine Fassung. Hängt z.B.

U nicht von p, t und $\beta_1, \ldots, \beta_m$ ab und ist $k=1$, so wird 5) zu: $F(i, p, t) = -\nabla U(\sigma(p, t))$, d.h. „$F_i = -\nabla U(x)$“.

D9. x ist ein System des *freien Falls im homogenen Feld* genau dann, wenn

1) x ist ein konservatives System bezüglich U,
2) $k=1$ und $m=2$,
3) für alle $p \in P$ und $t, t' \in T$: $\psi_1(p, t) = \mu(p)$ und $\psi_2(p, t) = \psi_2(p, t') > 0$,
4) für alle $p, \alpha, \beta_1, \beta_2, t$: $U(p, \alpha, \beta_1, \beta_2) = \beta_1 \beta_2 |\alpha|$.

Hier ist eine Kraftkomponente völlig bestimmt durch Angabe der Parameter und der mathematischen Form. Die Grundmenge P der Teilchen enthält nur frei fallende Teilchen und nicht die Körper, die die Felder „erzeugen“. Die sogenannten Beschleunigungskonstanten werden als Parameter ψ_2 aufgefaßt, die zeitunabhängig und positiv sind (D9-3). Hat man ein System, in dem alle Teilchen auf den gleichen Zentralkörper fallen, so ist ψ_2 darüber hinaus auch von p unabhängig. Durch Einsetzen erhält man dann $F(i, p, t) = -\nabla U(p, \sigma(p, t), \mu(p,), g, t) = -\nabla g\mu(p)\sigma(p, t) = -g\mu(p)\sigma(p, t) \cdot |\sigma(p, t)|^{-1}$, d.h. „$F_i = -g\mu$“. Schränkt man D9 auf ein Teilchen ein, das sich auf einer Geraden bewegt, so läßt sich das Fallgesetz von Gelilei „$s = -gt^2$“ ableiten.

D10. x ist ein *Hookesches System* genau dann wenn

1) x ist ein konservatives System bezüglich U,
2) $\|P\| = 1$,
3) $k=1$ und $m=1$,
4) für alle $p \in P$ und $t, t' \in T$:
$$\psi_1(p, t) = \psi_1(p, t') > 0,$$
5) für alle p, α, β, t: $U(p, \alpha, \beta, t) = \beta |\alpha|^2$.

Ein Hookesches System beschreibt die Bewegung nur eines Teilchens gemäß dem Hookeschen Gesetz. Nach D8 ist ein Parameter φ_1 der Ort. ψ_1 ist die Federkonstante $k/2$, die wir als „konstanten“ Parameter behandeln. Durch Einsetzen erhält man $F(i, p, \sigma(p, t), k/2, t) = -k\sigma(p, t)$, d.h. „$F_i = -kx$“. Kompliziertere Gesetze für elastische Systeme kann man durch Verkomplizierung von D10 erhalten, indem man zusätzlich Geschwindigkeits- und Zeitabhängigkeit fordert.

D11. x ist ein *inverses Abstandsquadrat-System bezüglich h* genau dann wenn

1) x ist ein konservatives System bezüglich U,
2) $k = \|P\|$,
3) für alle $p \in P$, $t \in T$ und $j \leqq k$: $\varphi_j(p, t) = \sigma(p_j, t)$,
4) es gibt $i \leqq n$, so daß für alle $p_j, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_m, t$:
$$U(p_j, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_m, t) = \sum_{l \neq j} h(p_j, p_l, t) \frac{1}{|\alpha_j - \alpha_l|}.$$

Wir nehmen hier an, daß die Teilchen in P durchnumeriert sind: $P = \{p_1, \ldots, p_k\}$. Die Allquantoren über p und j in Bedingung 3) laufen dann eigentlich über die gleichen Entitäten und eine Quantifikation über p ist überflüssig. Da aber eine genauere Formulierung unnötige Umständlichkeit erzwingt, haben wir es bei der etwas ungenauen Version belassen. F_i ist der mathematischen Form nach bis auf h bestimmt. Parameter sind die Orte aller Teilchen. Durch Einsetzen erhält man

$$F(i, p_j, \sigma(p_1, t), \ldots, \sigma(p_k, t), \psi_1(p, t), \ldots, \psi_m(p, t), t) = \sum_{l \neq j} h(p_j, p_l, t) \frac{\sigma(p_j, t) - \sigma(p_l, t)}{|\sigma(p_j, t) - \sigma(p_l, t)|^3},$$

d.h. „$F_i = \sum_{l \neq j} h(p_j, p_l, t) \frac{x_j - x_l}{|x_j - x_l|^3}$“.

U und F hängen hier von den ψ_j nicht ab. Die ψ_j werden aber in der folgenden Definition gebraucht.

D12. x ist ein *gravitierendes System* genau dann wenn

1) x ist ein inverses Abstandsquadrat-System bezüglich h,
2) $k = \|P\|$,
3) $m = k+1$,
4) für alle $p \in P$, $t \in T$ und $j \leqq k$: $\varphi_j(p, t) = \sigma(p_j, t)$,
5) für alle $p \in P$, $t \in T$ und $j \leqq m-1$: $\psi_j(p, t) = \mu(p_j)$ und für alle p', t': $\psi_m(p, t) = \psi_m(p', t') > 0$,
6) für alle $p, p' \in P$ und $t \in T$:
$$h(p, p', t) = \psi_m(p, t)\mu(p)\mu(p').$$

Hier treten alle Orte und alle Massen als Parameter auf. Auch die Gravitationskonstante $g = \psi_m(p, t)$ wird als konstanter Parameter behandelt. Die mathematische Form von F ist durch D8-4, D11-4 und D12-6 vollständig bestimmt. Wir haben hier also ein Beispiel für ein Terminalgesetz der Theorie. Das Potential U is explizit angegeben; es hängt von den Teilchen ab. Bei fester Numerierung der Teilchen in der Reihenfolge $p_1, \ldots, p_k$ hängt U von p_j ab, indem p_j den Index liefert, der bei der Summation ausgespart wird. Äquivalent zu 6) von D12 hätten wir auch direkt in D8 für alle $p_j, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_m, t$ fordern können, daß

$$U(p_j, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_m, t) = -\sum_{l \leqq k, l \neq j} \beta_m \frac{\beta_j \beta_l}{|\alpha_j - \alpha_l|}.$$

Durch Einsetzen erhält man aus D8, D11 und D12:

$$F(i, p_j, \sigma(p_1, t), \ldots, \sigma(p_k, t), \mu(p_1), \ldots, \mu(p_k), g, t) = -\sum_{l \neq j} g\, \mu(p_j)\, \mu(p_l) \frac{\sigma(p_j, t) - \sigma(p_l, t)}{|\sigma(p_j, t) - \sigma(p_l, t)|^3},$$

d.h. $$„F_i = -\sum_{l \neq j} g\, \mu_j \mu_l \frac{x_j - x_l}{|x_j - x_l|^3}“.$$

D13. x ist ein *Coulombsches System* genau dann wenn

1) x ist ein inverses Abstandsquadrat-System bezüglich h,
2) $m = \| P \| + 1$,
3) für alle $p, p' \in P$, $t, t' \in T$ und $j \leqq m$:
$$\psi_j(p, t) = \psi_j(p', t') > 0,$$
4) für alle $p_j, p_l \in P$, $t \in T$:
$$h(p_j, p_l, t) = \psi_m(p_j, t)\, \psi_l(p_l, t).$$

$\psi_1, \ldots, \psi_{m-1}$ sind die Ladungen von $p_1, \ldots, p_k$ ($k = m - 1$ wegen $m = \| P \| + 1$ und $\| P \| = k$). Als formale Funktionen von p und t hängen sie weder von p noch von t echt ab (D13-3). Wir schreiben $e_i = \psi_i(p_i, t)$. ψ_m ist die Dielektrizitätskonstante. Auch sie ist für ein gegebenes System konstant, hängt also nicht von p und t ab (D13-3) für $m = \| P \| + 1$). Man schreibt meist $\psi_m(p, t) = 1/4\pi\varepsilon$. Einsetzung ergibt:

$$F(i, p_j, \sigma(p_1, t), \ldots, \sigma(p_k, t), e_1, \ldots, e_k, 1/4\pi\varepsilon, t) = -\sum_{l \neq j} \frac{1}{4\pi\varepsilon} e_j e_l \frac{\sigma(p_j, t) - \sigma(p_l, t)}{|\sigma(p_j, t) - \sigma(p_l, t)|^3}.$$

Ganz analog kann man auch eine Spezialisierung für die Magnetostatik einführen.

D14. x ist ein *Lorentz-System* genau dann wenn

1) x ist ein geschwindigkeitsabhängiges System,
2) $k = 2 \| P \|$ und $m = k + 1$,
3) für alle $p \in P$, $t \in T$ und $j \leqq k$: $\varphi_j(p, t) = \sigma(p_j, t)$, für alle j mit $k < j \leqq 2k$: $\varphi_j(p, t) = \dot{\sigma}(p_j, t)$ und für alle $j \leqq m$, alle p' und t':
$$\psi_j(p, t) = \psi_j(p', t') > 0,$$
4) es gibt $i \leqq n$ und $E\colon S \times T \to S$, $B\colon S \times T \to S$, so daß für alle $p_j, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_m, t$ und $\alpha_1', \ldots, \alpha_k'$:
$$F(i, p_j, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_1', \ldots, \alpha_k', \beta_1, \ldots, \beta_m, t) = \beta_j \left[E(\alpha_j, t) + \left(\frac{\alpha_j}{\beta_m} \otimes B(\alpha_j, t) \right) \right]$$

$\psi_1, \ldots, \psi_{m-1}$ sind die Ladungen $e_1, \ldots, e_k$ von $p_1, \ldots, p_k$, ψ_m ist die Lichtgeschwindigkeit c. E und B sind das elektrische bzw. das magnetische Feld. Durch Einsetzen erhält man $F(i, p, t) = e_p[E(\sigma(p, t), t) + (\dot{\sigma}(p, t)/c \otimes B(\sigma(p, t), t))]$. Die Geschwindigkeiten sind hier als eigene Parameter nötig, weil man sonst die mathematische Form in D14-4 nicht hinschreiben könnte.

III. Abschließende Bemerkungen

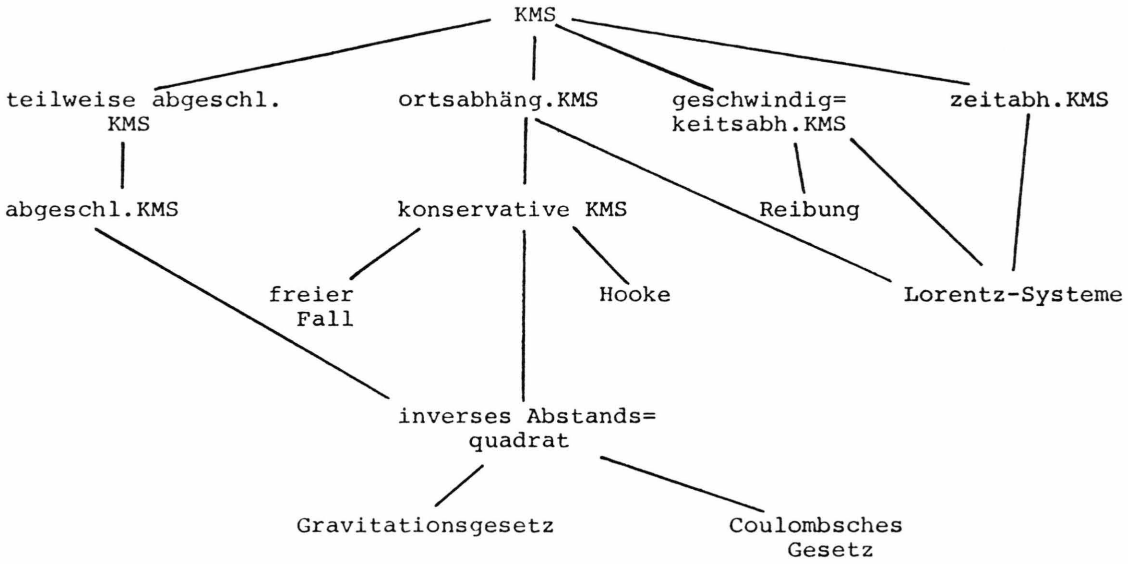
Wir gehen noch kurz auf Fragen ein, die die Gesamtstruktur der KPM und deren Verbindung zur Anwendung betreffen.

a) *Die Gesamtstruktur der KPM*

Sie läßt sich graphisch als „Netz“ veranschaulichen, wobei die „Knoten“ durch die verschiedenen Spezialisierungen und die „Fäden“ des Netzes durch die Spezialisierungsrelation gegeben sind. Zur genaueren, einheitlichen Darstellung modifizieren wir diejenigen früheren Definitionen, in denen U oder h vorkommt, wie folgt. U und h werden existenzquantifiziert und zwar an gleicher Stelle wie die restlichen Komponenten der Strukturen. Die Relativierung in D8 und D11 auf U bzw. h ist dann redundant, wird aber trotzdem beibehalten. Z.B. beginnen D8 und D9 dann wie folgt: „... genau dann wenn es U gibt, so daß: 1) x ist ein ...“. Dann haben alle bisher definierten Systeme die Form

$$\langle S, T, \mathbb{N}, \mathbb{R}; P, \sigma, \mu, k, m, n, \varphi_1, \ldots, \varphi_k, \psi_1, \ldots, \psi_m, F \rangle,$$

also die Form eines KMS. Für $1 \leqq j \leqq 14$ sei SYS_j die Menge aller Systeme, die Definition Nummer j



erfüllen. Die Klassen SYS_j sind bezüglich der Mengeninklusion halbgeordnet und diese Halbordnung drückt gerade den Prozeß der Spezialisierung aus. Für $\mathrm{SYS}_j \subseteqq \mathrm{SYS}_r$ sagen wir, daß SYS_j eine Spezialisierung von SYS_r sei (oder genauer: daß das durch Definition Nummer j gegebene Gesetz G_j eine Spezialisierung des durch Definition Nummer r gegebenen Gesetzes G_r sei). Für G_j und G_r bedeutet $\mathrm{SYS}_j \subseteqq \mathrm{SYS}_r$, daß G_r aus G_j logisch folgt. Die Gesamtstruktur ist nun im folgenden Diagramm als Netz wiedergegeben, wobei die Knoten aus den Systemklassen SYS_j bestehen und die Fäden Spezialisierungen andeuten. Ein Knoten ist jeweils Spezialisierung aller über ihm liegenden und mit ihm durch Fäden verbundenen anderen Knoten.

b) Kombination von Systemen und Näherung

Die Kombination von Systemen ist eine rein begriffliche Operation, mit der sich „gemischte" Systeme, in denen mehrere verschiedene Kraftkomponenten vorhanden sind, aus „reinen" Systemen, in denen jeweils nur eine Kraftkomponente wirkt, zusammensetzen lassen. Da man sich hierbei nur für die verschiedenen Kraftkomponenten eines einzigen Systems interessiert, kann man annehmen, daß die Kinematik in allen betrachteten Systemen gleich ist.

Ein System heiße *rein*, wenn genau eine Kraftkomponente nicht identisch Null ist. Nun seien x_1, x_2 zwei Systeme, deren Komponenten wir mit oberen Indizes schreiben, also $x_i = \langle S, T, \mathbb{N}, \mathbb{R}; P^i, \sigma^i, \ldots, F^i \rangle$ (für $i = 1{,}2$). Die j-te Komponente von x_i werde mit $y_j{}^i$ bezeichnet, z.B. $y_5{}^i = P^i$. Wir nehmen an, daß außer den Kräften alle Komponenten in x_1 und x_2 identisch sind. Es handelt sich also um das „gleiche" System, nur mit verschiedenen Kräften. (Natürlich kann nur eines dieser Systeme real sein.) Wir nennen nun ein System x *die Kombination* (in den Komponenten r und s) der Systeme x_1 und x_2, wenn gilt:

1) für alle i mit $4 < i \leqq k + m + 6$: $y_i = y_i{}^1 = y_i{}^2$,

2) für alle $p \in P^1$ und $t \in T^1$:

$$\sum_{l \leqq y_6} F(l, p, t) = F^1(r, p, t) + F^2(s, p, t)\,.$$

Ist x ein gemischtes System mit n nicht verschwindenden Kraftkomponenten, so läßt sich x offenbar durch $(n-1)$-fache Anwendung der Kombinationsoperation als Kombination aus reinen Systemen gewinnen. Die reinen Systeme bilden in diesem Sinne eine „Basis", aus der sich alle gemischten Systeme aufbauen lassen.

Die Kombination von Systemen spielt für die Anwendung eine große Rolle, da man bekanntlich jedes reale System nur behandeln kann, indem man einige der sicher auftretenden Kraftkomponenten (z.B. Gravitationskräfte von weit entfernten Teilchen) vernachlässigt. Anders gesagt betrachtet man nur solche Komponenten, deren Einfluß auf das System groß genug ist, um bei üblichen Bestimmungsverfahren relevant zu sein. Man rechnet dann das System nur mit diesen Kraftkomponenten durch, wobei die vernachlässigten Komponenten als zu Null gesetzt anzusehen sind. Man sagt auch, das für die Rechnung benutzte System sei eine *Näherung*. Unter Benutzung des Kombinationsbegriffs kann man sagen, daß man dabei das gegebene System als Kombination reiner Systeme auffaßt und in all diesen reinen Systemen — mit einer Ausnahme — die Kräfte gegen Null gehen läßt.

Es ist zu betonen, daß Kombination nichts mit Superposition zu tun hat.

c) Superposition

Die Idee der Superposition ist, daß man zwei (oder mehrere) Kraftkomponenten, die schon in realen Systemen wirken, real überlagert, so daß ein neues System mit neuer Gesamtkraft entsteht. Dazu seien x, x_1, x_2 Systeme, bei denen, im Unterschied zu b), die Kinematik verschieden sein kann, d.h. $\sigma \neq \sigma^1 \neq \sigma^2$. In der Regel interessiert man sich gerade für die Ortsfunktion σ, die im überlagerten System durch die dort wirkende Gesamtkraft (bei festen Anfangsbedingungen) gegeben ist. Genauer sagen wir, daß x eine *Superposition* von x_1 und x_2 sei, wenn gilt:

1) $T = T^1 \cup T^2$, $P = P^1 \cup P^2$,

2) $\mu_{/P^1 \cap P^2} = \mu^1{}_{/P^1 \cap P^2} = \mu^2{}_{/P^1 \cap P^2}$,

3) für alle $p \in P^1 \cap P^2$ und $t \in T^1 \cap T^2$:

$$F_{/T^1 \cap T^2} = F^1{}_{/T^1 \cap T^2} + F^2{}_{/T^1 \cap T^2}.$$

Dabei bedeutet $f_{/z}$ die Einschränkung der Funktion f auf die Menge z. Bei Superpositionen werden also die Gesamtkräfte addiert (Bedingung 3) und zwar für die Argumente, für die dies sinnvoll ist. Üblicherweise nimmt man dabei an, daß ein Teilchen in verschiedenen Systemen die gleiche Masse behält (Bedingung 2). Über die Ortsfunktionen der Systeme ist hier nichts gesagt. Eine Anwendung der Superposition besteht gerade darin, bei gegebenen x_1 und x_2 die Kraftfunktion des superponierten Systems zu benutzen, um Gleichungen für dessen Ortsfunktion zu erhalten und letztere berechnen zu können.

[1] G. Hamel, „Die Axiome der Mechanik“, in: Handbuch der Physik, Bd. **5**, Springer-Verlag, Berlin 1921.

[2] H. Hermes, „Zur Axiomatisierung der Mechanik“, in: The Axiomatic Method, (Hrsg. L. Henkin, P. Suppes und A. Tarski). North-Holland, Amsterdam 1959.

[3] H. Simon, The Philosophical Magazine, **38**, No. 276 (1947).

[4] P. Hinst, Logische Propädeutik, Fink-Verlag, München 1974.

[5] a) E. Mach, Über die Definition der Masse, Carls Repertorium, **4**, (1868). b) E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung, F. A. Brockhaus, Leipzig 1883.

[6] J. C. C. McKinsey, A. C. Sugar und P. Suppes, Rational Mech. Anal. **2**, (1953).

[7] J. D. Sneed, The Logical Structure of Mathematical Physics, Reidel Publishing Comp., Dordrecht 1971.

[8] G. Ludwig, Die Grundstrukturen einer physikalischen Theorie, Springer-Verlag, Berlin 1978.

[9] G. Ludwig, Einführung in die Grundlagen der Physik, Bd. I, Bertelsmann-Universitätsverlag, Düsseldorf 1974.

[10] P. Suppes, Axiomatic Set Theory, van Nostrand, Princeton 1960.

[11] P. Mittelstaedt, Klassische Mechanik, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim 1970, S. 61—62.